平成28年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜 学力試験 (物理工学 専攻)

基礎科目

試験時間

9:00 - 10:00

全問を解答すること

$\boxed{1}$ x, y, α, a, b を実数とし、次式

$$\left|\frac{x}{a}\right|^{\alpha} + \left|\frac{y}{b}\right|^{\alpha} = 1$$

で表される xy-平面内の図形 A に関し、以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha = 1$ の場合の図形 A で囲まれる面積を S_1 とする。
$a = b = 1$ のとき、A を図示し S_1 を求めよ。

(2) $\alpha = 2$ の場合の図形 A で囲まれる面積を S_2 とする。
$a > 0, b > 0$ のとき、S_2 を a, b を用いて表せ。理由も記すこと。

(3) $\alpha = \frac{1}{2}, a = b = 4$ とし、$y > 0$ の場合を考える。$x = 1$ での y の値と、
y を x の関数と見た時のこの点の回りの 2 次のテーラー展開を求めよ。
剰余項は R_3 と記すこと。

(4) $\alpha = \frac{1}{2}$ の場合の図形 A で囲まれる面積を S_3 とする。
a, b が共通の場合の S_1, S_2, S_3 の大小関係を答えよ。理由も記すこと。

$\boxed{2}$ 次式で与えられるベクトル場 $\vec{A}(x,y,z)$

$$\vec{A}(x,y,z)=\frac{-y}{x^2+y^2+a^2}\hat{e}_x+\frac{x}{x^2+y^2+a^2}\hat{e}_y$$

について、以下の問いに答えよ。ここで、$\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ は、それぞれ x-, y-軸方向の単位ベクトルである。

(1) ベクトル場 $\vec{A}(x,y,z)$ の回転 $\mathrm{rot}\vec{A}(x,y,z)=\vec{\nabla}\times\vec{A}(x,y,z)$ を求めよ。ここで、$\vec{\nabla}$ は 微分演算子で、 x-、 y-、z-軸方向の単位ベクトル $\hat{e}_x$、 $\hat{e}_y$、$\hat{e}_z$ を用いて

$$\vec{\nabla}=\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

と定義される。

(2) 次の極限

$$\lim_{a\to 0}\mathrm{rot}\vec{A}(x,y,z)$$

を計算せよ。

(3) ベクトル場 $\vec{A}(x,y,z)$ の曲線 C

$$C=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, z=0\ (\alpha>0,\ \ \beta>0)\right\}$$

に沿って、反時計回りの方向の線積分

$$\int_C\vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{r}\left(=\int_C\vec{A}(x,y,z)\cdot\hat{t}ds\right)$$

を求めよ。ここで、$\hat{t}$ は曲線 C の接線方向の単位ベクトル、ds は曲線の無限小の長さであり、$d\vec{r}$ はこれらを使い、$d\vec{r}=\hat{t}ds$ である。また、必要ならば、公式

$$\int_0^\infty\frac{1}{s^2+t^2}dt=\left[\frac{1}{s}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{t}{s}\right]_0^\infty\quad(s>0)$$

を用いよ。

(4) 次の極限を計算せよ。

$$\lim_{a\to 0}\int_C\vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{r}$$

(5) (2) 及び (4) の結果を参照し、$a \to 0$ の極限における、ストークスの定理

$$\int_D \vec{\nabla} \times \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{\sigma} = \int_C \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{r}$$

について考察せよ。ここで、$d\vec{\sigma}$ は面積素であり、xy-平面上の領域 D は閉曲線 C の内部

$$D = \left\{ (x, y) \middle| \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \leq 1 \ (\alpha > 0,\ \ \beta > 0) \right\}$$

である。

平成28年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜 学力試験 (物理工学 専攻)

専門科目

試験時間

10:15 - 11:15

全問を解答すること

1 軽くて伸び縮みしない糸の一端に固定された質量 m のおもりが, 滑らかな水平な板の上で原点 O から距離 r_0 の位置で，速度 v_0 をもって運動をはじめた。

以下の二通りのやり方で，原点 O からのおもりの距離を変化させる。いずれの場合にも，おもりは小さく質点とみなすことができ，おもりと板との間および糸と板との間には摩擦力ははたらかないものとする。また，糸は細く太さを無視できるものとし，運動中に糸は弛むことはないものとする。

やり方１

図 1 のように，糸のもう一方の端は原点 O に開けられた小さな穴を通して鉛直下方に導かれ，糸を手で下方に引くと，原点 O からのおもりの距離が小さくなる。

(1) 原点 O からのおもりの距離が r_1 ($< r_0$)になったときのおもりの速度 v_1 を求めよ。ただし，糸からおもりが受ける力は，中心力と見なせるものとする。

(2) 原点 O からのおもりの距離が r_0 から r_1 まで変化するとき, 手が糸を引く力がする仕事 W を求めよ。

やり方２

図 2 のように，滑らかな水平な板の上に，円柱が固定されている。円柱の中心軸は鉛直方向を向いており，原点 O を通っている。糸のもう一方の端は，円柱側面におもりと同じ高さの点で固定されている。

原点 O から距離 r_0 だけ離れた位置から，おもりが速度 v_0 で動きはじめた。おもりが円柱の周りを回転すると，糸は円柱に巻き付き，おもりは原点 O に近づく。

(3) 原点 O からのおもりの距離が r_1 ($< r_0$)になったときのおもりの速度 v_2 を求めよ。ただし，糸が円柱に巻き付くことにより，エネルギー損失は伴わないものとする。

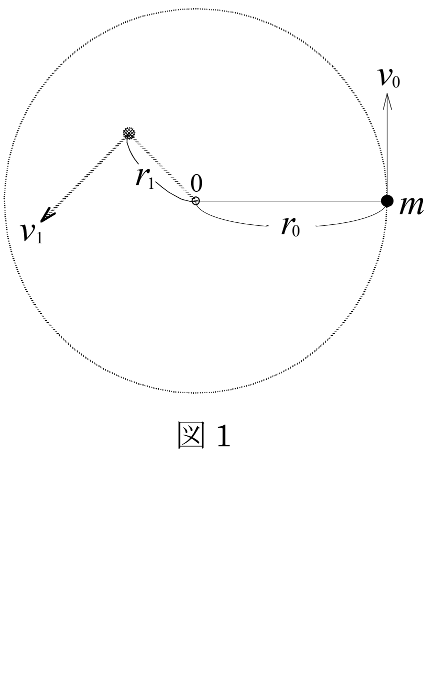

図 1

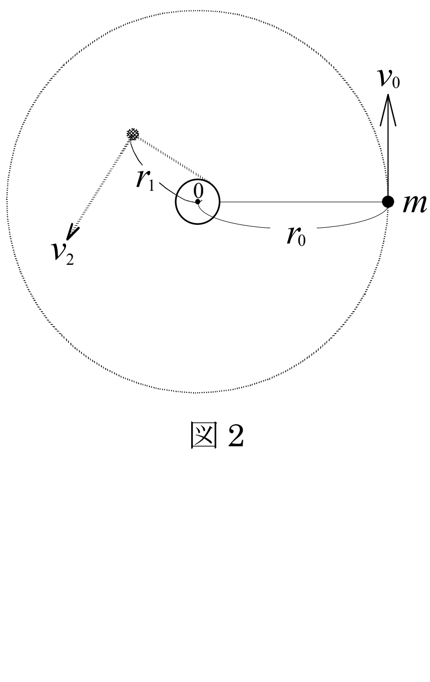

図 2

$\boxed{2}$ ゴムの性質について熱力学的に考察する。長さ l のゴムを張力 K で dl だけ伸ばす仕事 $d'W$ は $d'W = Kdl$ と書ける。この式と熱力学第 1 法則及び第 2 法則から，内部エネルギーの微分 dU は

$$dU = TdS + Kdl \quad \cdots \quad \text{(A)}$$

となる。ここで T は温度，S はエントロピーである。

(1) ヘルムホルツの自由エネルギー $F = U - TS$ の微分は，式 (A) を用いると以下のようになる。

$$dF = -SdT + Kdl$$

この式と独立変数を T, l としたヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, l)$ の全微分式から，以下の 2 つの関係式をそれぞれ求めよ。

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_l, \quad K = \left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)_T \quad \cdots \quad \text{(B)}$$

(2) 前問で得られた関係式から，以下の関係式を求めよ。

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T = \left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_l \quad \cdots \quad \text{(C)}$$

(3) ヘルムホルツの自由エネルギーの式 $F = U - TS$，式 (B) の 2 つ目の式，式 (C) を用い，以下の関係式を求めよ。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_T = K - T\left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_l$$

(4) マイヤー・フェリーの実験から，一定の長さに伸ばしたゴムの張力は絶対温度に比例する，ということが分かっている。これを式にすると，a を正の定数として，以下のようになる。

$$K = aT \quad \cdots \quad \text{(D)}$$

式 (D) の関係が成り立つゴムの内部エネルギー U は長さ l によらず，温度 T のみの関数であることを示せ。

(5) 式 (D) の関係が成り立つゴムを温度一定に保ったまま伸ばすと，エントロピーが減少することを示せ。

平成28年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜 学力試験 (物理工学 専攻)

外国語（英語）

試験時間

11:30 - 12:30

全問を解答すること

1　次の英文を読んで設問に答えよ。

Classical Physics at the Limit

(1)At the start of the 19th century, only a few scientists believed that matter consists of atoms. By century's end, there was substantial evidence not only for atoms but for the existence of charged subatomic particles. The explorations into atomic structure culminated with Rutherford's nuclear model.

Rutherford's nuclear model of the atom matched the experimental evidence about the structure of atoms, but it had (2)two serious shortcomings. Electrons orbiting the nucleus in a Rutherford atom are oscillating charged particles. According to Maxwell's theory of electricity and magnetism, these orbiting electrons should act as small antennas and radiate electromagnetic waves. That sounds encouraging, because we know that atoms can emit light, but it was easy to show that a Rutherford atom would radiate a (3)continuous rainbow-like spectrum. Thus one failure of Rutherford's model was an inability to predict the (　4　) nature of emission and absorption spectra.

In addition, the atoms would continuously lose energy as they radiate electromagnetic waves. As Figure 1 shows, this would cause the electrons to spiral into the nucleus! Calculations showed that a Rutherford atom can last no more than about a microsecond. In other words, classical Newtonian mechanics and electromagnetism predict that an atom (5) which electrons orbit a nucleus would be highly unstable and would immediately self-destruct. This clearly does not happen.

(6)The experimental efforts of the late 19th century had been impressive, and there could be no doubt about the existence of electrons, about the small positive nucleus, and about the unique (　4　) spectrum emitted by each atom. But the theoretical framework for understanding such observations had lagged behind. As the new century dawned, physicists could not explain the structure of atoms, could not explain the stability of matter, could not explain (　4　) spectra or why an element's absorption spectrum differs from its emission spectrum, and could not explain the origin of x rays or radioactivity.

(出典：Randall D.Knight, "Physics for Scientists and Engineers: A Strategic Approach with Modern Physics, Addison-Wesley 2004)

culminate [動] (〜に)終わる、結果的に(〜に)なる
shortcoming [名] 欠点、短所

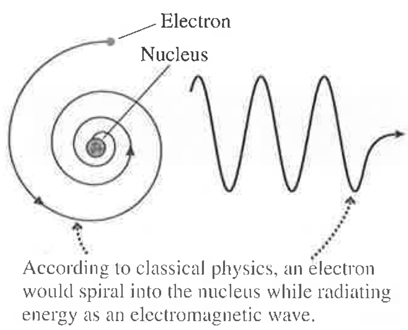

Figure 1　The fate of a Rutherford atom.

1-1　下線部(1)を和訳せよ。

1-2　下線部(2)を日本語で説明せよ。

1-3　下線部(3)を和訳し、その対義語である(　4　)に入る適切な英単語(形容詞)を記述せよ。

1-4　(　5　)に入る適切な英単語(前置詞)を記述せよ。

1-5　下線部(6)を和訳せよ。

2

図 2 の図形を英語で説明せよ。

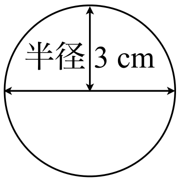

図 2

3

ニュートンの運動方程式(運動の第 2 法則)について英語で説明せよ。