平成27年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜 学力試験 (物理工学 専攻)

基礎科目

試験時間

9:00 - 10:00

全問を解答すること

$\boxed{1}$ 3次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ について, X から第 i 行と第 j 列を取り除いた行列を $\hat{X}_{ij}$ とおいて, $\hat{x}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\hat{X}_{ij})$ と定義し, $\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \hat{x}_{13} \\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \hat{x}_{23} \\ \hat{x}_{31} & \hat{x}_{32} & \hat{x}_{33} \end{pmatrix}$ とおき, その転置行列を $\tilde{X}$ とおく。即ち, $\tilde{X} = {}^t\hat{X}$ とおく。また,

$$\mathrm{tr}(X) = \sum_{i=1}^{3} x_{ii}$$

とおくとき, 以下の小問に答えよ。

(1) $\det(X)$ の第 i 行に関する余因子展開を $x_{ij}, \hat{x}_{ij}$ $(j = 1, 2, 3)$ を用いて書き下せ。さらに, $\det(X)$ を 9 個の独立変数 x_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ の関数とみなすとき,

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \det(X) = \hat{x}_{ij}$$

であることを示せ。

(2) x_{ij} が実数パラメータ t の関数とする。このとき, $\det(X)$ も t の関数である。導関数 $\dfrac{d}{dt}\det(X)$ を $\hat{x}_{ij}$, $\dfrac{dx_{ij}}{dt}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ を用いて表せ。さらに,

$$\frac{d}{dt}X = \begin{pmatrix} \frac{dx_{11}}{dt} & \frac{dx_{12}}{dt} & \frac{dx_{13}}{dt} \\ \frac{dx_{21}}{dt} & \frac{dx_{22}}{dt} & \frac{dx_{23}}{dt} \\ \frac{dx_{31}}{dt} & \frac{dx_{32}}{dt} & \frac{dx_{33}}{dt} \end{pmatrix}$$

とおくとき,

$$\frac{d}{dt}\det(X) = \mathrm{tr}\left(\tilde{X}\ \frac{d}{dt}X\right)$$

であることを示せ。

(3) 3 次正方行列 A と実数パラメータ t について, $X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ とおく。ただし, A^0 は 3 次単位行列 E とし, $0! = 1$ とする。この時, $X(0) = E$,

$$\frac{d}{dt}X(t) = X(t)A, \quad \frac{d}{dt}\det(X(t)) = \det(X(t)) \cdot \mathrm{tr}(A)$$

であることを示し, $\det(X(t))$ を求めよ。さらに, $\det(X(1)) = 1$ であるための必要十分条件は, $\mathrm{tr}(A) = 0$ であることを示せ。

$\boxed{2}$

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ について, 偏微分 $\dfrac{\partial x}{\partial r}, \dfrac{\partial x}{\partial \theta}, \dfrac{\partial y}{\partial r}, \dfrac{\partial y}{\partial \theta}$ とヤコビ行列式

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

を求めよ。 また極座標変換を用いて, 重積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

の値を求めよ。その結果を用いて, ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

の値を求めよ。

(2) x の多項式 $H_k(x)\ (k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ を高次導関数を用いて, 次の様に定める。

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2}\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2}$$

$H_0(x),\ H_1(x),\ H_2(x)$ を求めよ。また,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_k(x)H_k(x)e^{-x^2}\,dx \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

を求めよ。

平成27年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜 学力試験 (物理工学 専攻)

専門科目

試験時間

10:15 - 11:15

全問を解答すること

1　図１のような２辺の長さが a（以後、a 辺という。）および b（以後、b 辺という。）の矩形コイル ABCD が一様な磁場中（磁束密度ベクトルを $\boldsymbol{B}$、その大きさを B とする。）にある。コイルは上下２つの b 辺の中点を通り、左右の a 辺に平行な軸の周りに自由に回転できる。a 辺に沿って A 点から B 点に向かう方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$、b 辺に沿って D 点から A 点に向かう方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{j}$ とする。また、コイル面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角を θ とする。$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{i}$ は常に直交する。

以下の各問いに答えよ。その際、問い毎に指定された要領で解答すること。これを守らない場合、採点できないことがある。

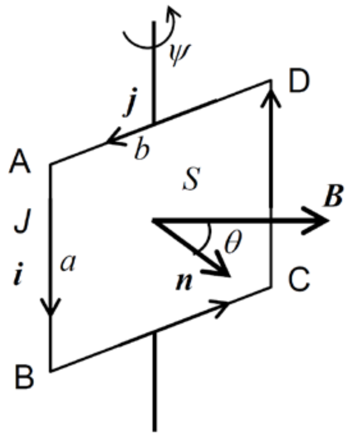

図１

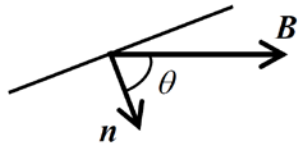

図２　AD 辺を上から見た図

（１）図１の矢印の方向にコイルを周回する電流 J が流れている。

(i) 上下２つの b 辺が磁束密度 $\boldsymbol{B}$ から受ける力のベクトル $\boldsymbol{F}_{\mathrm{BC}}$ および $\boldsymbol{F}_{\mathrm{DA}}$ を J, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{B}$ および b を用いて示せ。これから、それらの力が互いに相殺することを説明せよ。

(ii) $\boldsymbol{F}_{\mathrm{BC}}$ および $\boldsymbol{F}_{\mathrm{DA}}$ の大きさを J, B, b および θ を用いて示せ。

(iii) 左右２つの a 辺が磁束密度 $\boldsymbol{B}$ から受ける力のベクトル $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$ および $\boldsymbol{F}_{\mathrm{CD}}$ を J, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{B}$ および a を用いて示せ。

(iv) 図２は上側の辺 AD からコイルを見下ろした図である。これに相当する図を解答用紙に描き、$\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$ および $\boldsymbol{F}_{\mathrm{CD}}$ の方向を描き込め。この際、力の作用線の関係を正しく描くこと。

（２）$\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$ および $\boldsymbol{F}_{\mathrm{CD}}$ の作用線は同一直線上になく、２つの力は偶力になる。コイルの回転軸周りのモーメントは $\boldsymbol{N} = \dfrac{1}{2}b\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}} - \dfrac{1}{2}b\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{F}_{\mathrm{CD}}$ で与えられる。

(i) $\boldsymbol{N}$ の大きさを J, B, a, b および θ を用いて表し、その方向を説明せよ。

(ii) いずれコイルはある方向で静止するだろう。そのときの θ を理由を付して示せ。

（３）コイルの回転角 ψ に比例する復元力 $C\psi$ を生じる軸を用いると電流値が計れるが、$\boldsymbol{N}$ の大きさが θ に依存すると使いづらい。図３のように、円柱形の強磁性体とその断面よりわずかに大きい矩形コイルを用いると、$\boldsymbol{N}$ の大きさが θ に依存しないようにできる。

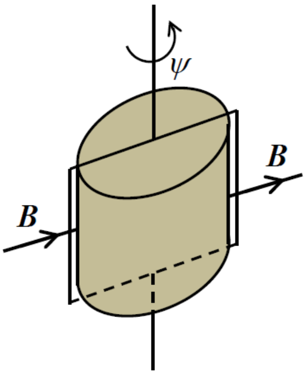

図３

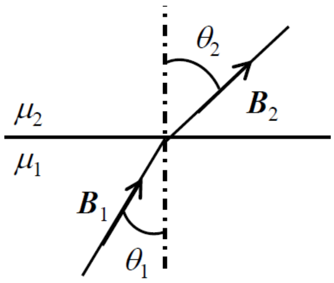

図４

(i) 図４のように、磁気的に等方で、透磁率がそれぞれ μ_1, μ_2 の媒質が接しているとき、境界面上に伝導電流がなければ、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の境界面に直交する成分とともに磁場 $\boldsymbol{H}$ の境界面に平行な成分も境界面の両側で連続である。このことを用いて、図の θ_1, θ_2 に対して、$\dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}$ を μ_1, μ_2 を用いて表せ。また、$\mu_2 \to \infty$ の時、θ_1 はどうなるか。

(ii) 円柱形強磁性体の他に適切な磁石を組み合わせると、円柱面の左側の表面近傍では、大きさ一定の $\boldsymbol{B}$ が円柱面に直交して円柱の外から中に向かい、右側の表面近傍では、同じ大きさの $\boldsymbol{B}$ が円柱面に直交して円柱の中から外に向かう状態を実現できる。このとき、左右２つの a 辺に対しては、図２においてコイルの回転角によらず $\theta = \dfrac{1}{2}\pi$ になっている。コイルの回転軸回りの慣性モーメントを I、角速度を ω として、コイルの回転を記述する方程式を書け。

(iii) コイルにきわめて短時間 τ の間、時間変化が不明の電流が流れた。この間に電流が運んだ全電荷 Q を求めたい。そのため、先ず、電流が流れた直後にコイルが持つ角運動量 L と運動エネルギー K を $\Phi = Bab$ と Q を用いて表せ。

(iv) コイルは、回転軸のねじれの弾性エネルギー $U = \dfrac{1}{2}C\psi^2$ が K に等しくなるまで回転する。これから、Q を既知量 C, I, Φ と計測量 ψ を用いて表せ。この原理を利用するものを衝撃検流計という。

$\boxed{2}$ x 軸の正方向へ一次元的に運動する質量 m の電子について考える。一般に, エネルギー固有値を E, ポテンシャルエネルギーを $V(x)$, 電子の波動関数を $\psi(x)$ とすると, シュレディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

と表される。ここで $\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割った定数である。いま, $V(x)$ は

$$V(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ V_0 & (x\geq 0)\end{cases}$$

で与えられるとする（V_0 は正の定数)。$x=-\infty$ において運動エネルギーは $E_0(<V_0)$ であった。以下の問に答えよ。

(1) $x<0$, $x\geq 0$ におけるシュレディンガー方程式をそれぞれ記せ。

(2) $\psi(x)$ に対して, $x=0$ における境界条件を二つ記せ。

(3) x 全域でのシュレディンガー方程式と (2) の境界条件を満たす波動関数を図示せよ。グラフは, $x<0$, $x\geq 0$ 両領域での定性的特徴がわかればよく, 定量的である必要はない。

以下の問題では $V_0=5$ eV, $E_0=1$ eV とする。 解答に数値が求められている場合は有効数字 2 桁まで求めよ。必要なら $m=9.1\times10^{-31}$kg, $h=6.6\times10^{-34}$ J·s, 1 eV $=1.6\times10^{-19}$ J の値を用いよ。$\sqrt{5}=2.24$, 円周率 $\pi=3.14$ とする。

(4) $x<0$ の領域における電子の運動量 p を m, E_0 を用いて表せ。
電子のド・ブロイ波長 λ は $\lambda=h/p$ で与えられる。λ の値を求めよ。

(5) $x\geq 0$ の領域において, 位置 x における電子の存在確率を $p(x)$ とする。

$$p(x_0)=p(0)/e$$

となるような位置 x_0 の値を求めよ。e は自然対数の底である。

平成27年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜 学力試験 (物理工学 専攻)

外国語（英語）

試験時間

11:30 - 12:30

全問を解答すること

1. 次の英文は、光の速度の不変性(invariance)を説明したものである。

If we accelerate a bus (i)that we are driving, the cars on the other side of the road pass by with higher and higher speeds. For light, experiment shows (ii)that (a)this is not so: light always passes by with the same speed. Light does not behave like cars or any other matter object. Again, all experiments confirm this weird behavior.

(b) Why exactly is the invariance of the speed of light almost unbelievable, even though the measurements show it unambiguously? Take two observers O and Ω moving with relative velocity v, such as two cars on opposite sides of the street. Imagine (iii)that at the moment they pass each other, a light flash is emitted by a lamp in O. The light flash moves through positions $x(t)$ for observer O and through positions $\xi(\tau)$ for Ω. Since the speed of light is the same for both, we have $x / t = c = \xi / \tau$. However, in the situation described, we obviously have $x \neq \xi$. In other words, the invariance of the speed of light implies (iv)that $t \neq \tau$, (c)i.e.,(v) that time is different for observers moving relative to each other. Time is thus not unique.

単語の意味：pass by (通り過ぎる)、weird (異様な)、ambiguously (曖昧に)

問 1.1 下線部(a)の this の示す内容を日本語で答えよ。
問1.2 下線部(b)の it は何を指すか、英語で答えよ。
問1.3 下線部(b)の"even ... unambiguously"を除いた部分を和訳せよ
問 1.4 (i)-(v)の that のうち、文法上異なる用法の that を番号で答えよ。
問 1.5 下線部(c)の意味と同じ意味の単語または節を、本文中から抜き書きせよ。

2. 次の文章は光の速度を述べた教科書の一部である。

Can light in vacuum be accelerated? Most physicists say that every mirror accelerates light, because it changes its direction. We will see in the chapter (a)(前置詞) electromagnetism that matter also has the power to bend light, and thus to accelerate it. (b)However, it will turn out that all these methods only change the direction of propagation. (c)None has the power to change the speed of light in a vacuum. In particular, light is an example of a motion that cannot be stopped. (d)There are only a few other such examples. Can you name one? What would happen if we could accelerate light to higher speeds? For this to be possible, (e)light would have to be made of massive particles. If light had mass, it would be necessary to distinguish the 'massless energy speed' c from the speed of light c_L, which would be lower and would depend on the kinetic energy of those massive light particles. (f)The speed of light would not be invariant, but the massless energy speed would still be so. Massive light particles could be captured, stopped and stored in a box.

単語の意味：propagation (伝搬), massive (質量のある), particle (粒子), invariant (不変の)

問2.1 (a)のカッコ内に前置詞が入っている。意味が通るうえで、適切な前置詞を2つ選べ
about, in, on, at, to, from, after

問2.2 下線(b)を、(1) all とonly の関係および(2)無生物主語であることの
2点に注意を払って、日本語らしく意訳せよ。

問2.3 下線(c)を日本語らしく訳せ。

問2.4 onlyに注意して、下線(d)を日本語らしく訳せ。

問2.5 下線(e)に含まれるwouldは仮定法過去の用法である。条件文を入れ込んで和訳せよ。

問2.6 下線(f)の so が明瞭になるように、下線(f)を和訳せよ。

注：問 1 と 2 の英文は The free physics textbook, Motion Mountain, volume II. Relativity からの引用であり、http://www.motionmountain.net/motionmountain -volume2.pdf から入手した。

3. 次の節の英語読みを記述せよ（アルファベットの読みを書く必要なし、数字の読みを記せ)。たとえば $v=2$ m/s : v equals two meters per second

問3.1 $D=2.1\times10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$

問3.2 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ （「３分の４ 掛けるπ 掛けるrの3乗」と読め)

問 3.3 $p=1013\ \mathrm{hPa}$

問 3.4 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$