平成26年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜 学力試験 (物理工学 専攻)

基礎科目

試験時間

9:00 - 10:00

全問を解答すること

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$ が $x=0$ の近傍で n 回微分可能のとき，

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\cdot 2\cdots n}x^n$$

を，$x=0$ を中心とする n 次までのテイラー多項式と呼び，

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\}$$

を剰余項と言い，恒等式：$f(x) = \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\} + R_{n+1}(x)$ を，関数 $f(x)$ の $x=0$ を中心とする n 次までの有限テーラー展開と呼ぶ。このとき，

<u>命題</u>　「関数 $f(x)$ が $x=0$ の近傍で n 回微分可能，かつ，n 階微分 $f^{(n)}(x)$ が $x=0$ で連続ならば，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R_{n+1}(x)}{x^n} = 0$ である。」

について，次の各問に答えよ。

(1) 「関数 $f(x)$ が $x=0$ の近傍で微分可能のとき，関数 $f(x)$ は $x=0$ で連続，すなわち，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\{f(x)-f(0)\}=0$ である」ことを示せ。

(2) $n=1$ のときの <u>命題</u> を具体的に書き，それを証明せよ。
(注意：必要ならロピタルの定理を使ってよい。)

(3) $n=2$ のときの <u>命題</u> を具体的に書き，それを証明せよ。

(4) 関数 $\log(1+x)$ について，一般の n に対し，
$x=0$ を中心とする n 次までの有限テーラー展開を具体的に求めよ。
(注意：剰余項は，単に $R_{n+1}(x)$ と書けば十分である。)

$\boxed{2}$ 正則な n 次正方行列 A があり，その n^2 個の成分 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ が互いに独立な変数とみなせるとする。このとき，A の行列式 $\det A$ の微分に関する公式を作ることを考える。以下の【記号の定義】にも注意しながら，下の各問 (1)-(5) に答えよ。

*****

【記号の定義】

(ア) 一般に，正方行列 X の行列式を $\det X$ で表す。

(イ) 行列 X が，その第 (i,j) 成分を x_{ij} $(i,j=1,2,\cdots)$ とする行列であるとき，$X=[x_{ij}]$ と表記する。

(ウ) 行列 $X=[x_{ij}]$ が与えられたとき，第 (i,j) 成分が x_{ji} である行列を作ることができる $(i,j=1,2,\cdots)$。この行列を「X の転置行列」といい，${}^tX$ と表記する。すなわち ${}^tX=[z_{ij}]$ とすると $z_{ij}=x_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots)$ の関係がある。いいかえると，転置行列とは，もとの行列における行と列の役割を互いに入れ替えて作った行列である。

(エ) 一般に，n 次正方行列 $X=[x_{ij}]$ について「X のトレース」とよばれる量 $\mathrm{tr}X$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}X &= x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{nn}\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_{ii}\end{aligned}$$

によって定義する。特に 2 つの n 次正方行列 $X=[x_{ij}]$ および $Y=[y_{ij}]$ に対し，積 XY の第 (i,j) 成分が $\sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj}$ であることから，行列 XY のトレースは

$$\mathrm{tr}\,(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{ki}$$

となることに注意せよ。

(オ) n 次正方行列 A からその第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列を A_{ij} で表す $(i,j=1,2,\cdots,n)$。これを用いて量 $\tilde{a}_{ij}$ を

$$\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$$

によって定義することにする $(i,j=1,2,\cdots,n)$。

(カ) 上の (オ) で定義した $\tilde{a}_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ を用いて，n 次正方行列 $\tilde{A}$ を $\tilde{A}=[\tilde{a}_{ij}]$ で定義することにする。

*****

(1) $\det A$ の第 i 行に関する余因子展開を，a_{ij} および $\tilde{a}_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ を用いた表記で与えよ。

(2) $A\,{}^t\!\tilde{A}$ を $\det A$ と n 次単位行列 E を用いて表せ。

(3) 関係式

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A = \tilde{a}_{ij} \qquad\qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

が成り立つことを示せ。ただし，ここに現れる偏微分は，$\det A$ を 互いに独立な n^2 個の変数 a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ からなる n 次多項式とみなして計算されるものであるとする。

以下ではさらに，互いに独立な変数 a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ が，実数パラメータ t の関数として $a_{ij}(t)$ のようにみなせるとする。

(4) このとき，$\det A$ も パラメータ t の関数とみなせることに注意して，

$$\frac{d}{dt} \det A = \mathrm{tr}\left({}^t\!\tilde{A}\ \frac{dA}{dt} \right)$$

が成り立つことを示せ。ここに，$\frac{dA}{dt}$ は $\frac{dA}{dt} = \left[\frac{d}{dt} a_{ij}(t)\right]$ によって定義される n 次正方行列である。

(5) (2) に注意すると，(4) から 正則な n 次正方行列 A の行列式 $\det A$ の微分に関する公式

$$(\det A)^{-1} \frac{d}{dt} \det A = \mathrm{tr}\left(A^{-1} \frac{dA}{dt} \right)$$

が得られることを示せ。

平成26年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜 学力試験 (物理工学 専攻)

専門科目

試験時間

10:15 - 11:15

全問を解答すること

$\boxed{1}$ 温度 T の熱浴と熱平衡にある，N 個の区別できない独立した粒子からなる系を考える。各粒子は，エネルギーの値が 0 または ε ($\varepsilon > 0$) である 2 つの状態のうち，どちらかの状態をとることができるものとする。正準集団の考え方により，以下の各問に答えよ。なお，必要なら，二項定理

$$(x+y)^N = \sum_{t=0}^{N} \frac{N!}{t!(N-t)!} x^{N-t} y^t$$

を用いてもよい。

(1) k 個 ($0 \le k \le N$) の粒子が ε のエネルギー状態にあるときの，系の全エネルギー E_k を求めよ。

(2) (1) のような状態の場合の数 Ω_k (縮退度) を求めよ。

(3) 分配関数 Q を計算し，N，ε，T，および，ボルツマン定数 k_{B} を用いて表せ。

(4) 系の全エネルギーが E_k となる確率 P_k を，Q，Ω_k，E_k，T，および，k_{B} を用いて表せ。

(5) エネルギーの平均値 $\langle E \rangle$ が，次式で表されることを示せ。

$$\langle E \rangle = \frac{N\varepsilon}{1 + e^{\varepsilon / k_{\mathrm{B}} T}}$$

なお，必要なら，以下の関係式を用いてもよい。

$$a e^{-ax} = -\frac{d}{dx} e^{-ax}$$

$\boxed{2}$ 異なる2つのエネルギー準位 $|1\rangle$，$|2\rangle$ のみを持つ，1電子からなる仮想的な原子を考えよう。この系のハミルトニアンを $\hat{H}_0$，準位 $|1\rangle$ と $|2\rangle$ の波動関数およびエネルギー固有値を，それぞれ，$u_1(\vec{r})$ および ϵ_1，$u_2(\vec{r})$ および ϵ_2 $(\epsilon_2 > \epsilon_1)$ とする。ここで，$\vec{r}$ は電子の位置ベクトルで，それぞれの波動関数は規格化されているものとする。

(1) 内積 $\langle 1 | 1 \rangle = \int u_1^* \, u_1 \, d\vec{r}$，$\langle 1 | 2 \rangle = \int u_1^* \, u_2 \, d\vec{r}$，$\langle 2 | 1 \rangle = \int u_2^* \, u_1 \, d\vec{r}$，$\langle 2 | 2 \rangle = \int u_2^* \, u_2 \, d\vec{r}$ の値をそれぞれ求めよ。

時間に依存しない相互作用 $\hat{V}$ が新たに加えられたことによって生じる，この原子の状態変化について考える。

(2) $\hat{V}$ が作用している場合の定常状態の原子の波動関数を $\psi(\vec{r})$，そのエネルギーを E とする。波動関数 $\psi(\vec{r})$ が満たすシュレーディンガー方程式を，$\hat{H}_0$，$\hat{V}$，E，ψ を用いて示せ。

(3) 波動関数 ψ は，波動関数 u_1，u_2 の線形結合で $\psi = c_1 \, u_1 + c_2 \, u_2$ のように表すことができる。これを (2) で求めたシュレーディンガー方程式に代入し，その両辺に左から波動関数 u_1 を掛けて内積をとることにより，c_1 と c_2 の間に成立する関係式を ϵ_i，E，$V_{ij} = \langle i | \hat{V} | j \rangle = \int u_i^* \, \hat{V} \, u_j \, d\vec{r}$ (i，j は1または2) を用いて表せ。

(4) 前問 (3) と同様にして，シュレーディンガー方程式の両辺と波動関数 u_2 との内積をとることにより，c_1 と c_2 の間に成立する関係式を ϵ_i，E，V_{ij} を用いて表せ。

(5) 上の (3)，(4) から得られた2つの関係式を，行列

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

およびベクトル

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

を用いた式 $\mathbf{H}\,\vec{c} = E\,\vec{c}$ の形に書き換える。行列 $\mathbf{H}$ の各行列要素を ϵ_i，V_{ij} を用いて表せ。

(6) 前問 (5) で求めた行列 $\mathbf{H}$ の固有値 E を求めよ。

(7) $V_{21} = V_{12}^*$ で，$V_{11} = V_{22} = 0$ かつ $|V_{12}| \ll |\epsilon_2 - \epsilon_1|$ のとき，相互作用 $\hat{V}$ によって準位 $|1\rangle$，$|2\rangle$ のそれぞれに生じるエネルギーシフト $\Delta\epsilon_1$，$\Delta\epsilon_2$ を求めよ。ただし，$|V_{12}|$ の二次の項までで近似せよ。

平成26年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜 学力試験 (物理工学 専攻)

外国語（英語）

試験時間

11:30 - 12:30

全問を解答すること

次の英文は，２００８年に南部陽一郎，小林誠，益川敏英の３氏がノーベル物理学賞を受賞した受賞内容に関する一般向けの解説の一部である。この英文を読んで，以下の各問に答えよ。

INFORMATION FOR THE PUBLIC

The Nobel Prize in Physics 2008

(イ) Why is there something instead of nothing? Why are there so many different elementary particles? This year's Nobel Laureates in Physics have presented theoretical insights that give us a deeper understanding of what happens far inside the tiniest building blocks of matter.

Unravelling the hidden symmetries of nature

Nature's laws of symmetry are at the heart of this subject: or rather, (ロ) broken symmetries, both those that seem to have existed in our universe from the very beginning and those that have spontaneously lost their original symmetry somewhere along the road.

(ハ) In fact, we are all the children of broken symmetry. It must have occurred immediately after the Big Bang some 14 billion years ago when as much antimatter as matter was created. The meeting between the two is fatal for both; they annihilate each other and all that is left is radiation. Evidently, however, matter won against antimatter, otherwise we would not be here. But we are here, and just a tiny deviation from perfect symmetry seems to have been enough - one extra particle of matter for every ten billion particles of antimatter was enough to make our world survive. This excess of matter was the seed of our whole universe, which filled with galaxies, stars and planets - and eventually life. But what lies behind this symmetry violation in the cosmos is still a major mystery and an active field of research.

(elementary particle: 素粒子， unravel: 解く， laureate: 受賞者，
spontaneous: 自発的な， antimatter: 反物質)

出典： The Royal Swedish Academy of Sciences, The Nobel Prize in Physics 2008, Information for the Public: "Unravelling the hidden symmetries of nature".

(1) （イ）の下線部分を和訳せよ。

(2) （ロ）の下線部分 'broken symmetries' とはどのようなものか。英語で答えよ。

(3) （ハ）の下線部分を和訳せよ。

(4) （ハ）の下線部分の理由を日本語で説明せよ。

(5) 次の日本語を英語に訳せ。

回転しているこまは，次第に回転が遅くなるに連れて，ある方向に倒れる。
これは自発的対称性の破れの一つである。

(こま: top)