平成25年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜学力試験(物理工学専攻)

基礎科目

試験時間

9:00 - 10:00

全問を解答すること

$\boxed{1}$ xy 平面上のベクトル $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとる。原点を中心として, $\vec{e}_1$ を $\dfrac{2\pi}{3}$ ラジアン回転したベクトルを $\vec{f}_2$ とおき, $\vec{e}_1$ を $\dfrac{4\pi}{3}$ ラジアン回転したベクトルを $\vec{f}_3$ とおくとき, 以下の問に答えよ。

(1) $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ を求めよ。

(2) 各実数 a, b に対し, $k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{f}_2 + k_3\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をみたす $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ は無数に存在することを示せ。

(3) 各実数 a, b に対し, $k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{f}_2 + k_3\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をみたす $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ の中で, $|k_1\vec{e}_1|^2 + |k_2\vec{f}_2|^2 + |k_3\vec{f}_3|^2$ が最小となるものを求めよ。

$\boxed{2}$ 実数 x を変数に持つ関数

$$f(x) = \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}}$$

について以下の問に答えよ。

(1) $f(0)$ および $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ は微分方程式

$$\frac{df}{dx} = -2xf + 1$$

を満たすことを示せ。

(3) $\dfrac{d^2 f}{dx^2}, \dfrac{d^3 f}{dx^3}$ を，それぞれ x と f のみで表わせ。

(4) $f(x)$ を $x = 0$ のまわりで展開して

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

と表すとき，定数 a_1, a_2, a_3 を求めよ。

平成25年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜学力試験(物理工学専攻)

専門科目

試験時間

10:15 - 11:15

全問を解答すること

$\boxed{1}$ 真空中で，互いに直交する x 軸，y 軸，z 軸が図のように定められており，その xy 平面上で，原点 O を中心とする半径 a の円周に沿って一定の電流 I が矢印の方向に流れている。次に示すビオ-サバールの法則を用いて，以下の問に答えよ。なお，ここでは物理量は全て国際単位系 (SI) で表されているものとする。

[ビオ-サバールの法則]

細い線状の電流 I が真空中を流れているとき，その電流の長さ Δs の微小部分が，そこからベクトル $\boldsymbol{r}$ だけ離れた位置に作る磁束密度 $\Delta\boldsymbol{B}$ は,

$$\Delta\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

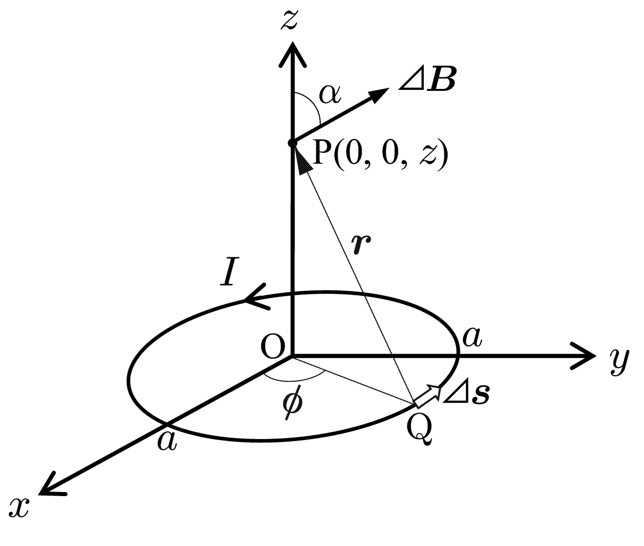
で与えられる。ここで，μ_0 は真空の透磁率，$\Delta\boldsymbol{s}$ は電流が流れる方向を向く長さ Δs の微小なベクトル，r はベクトル $\boldsymbol{r}$ の長さである。

(1) 図の円電流の点 Q の位置にある長さ Δs の微小部分が z 軸上の点 $\mathrm{P}(0, 0, z)$ に作る磁束密度 $\Delta\boldsymbol{B}$ の大きさ ΔB を，μ_0，I，a，z，Δs を用いて表せ。

(2) (1) の $\Delta\boldsymbol{B}$ が z 軸となす角を α として，$\cos\alpha$ を a と z を用いて表せ。

(3) この円電流全体が z 軸上の点 $\mathrm{P}(0, 0, z)$ に作る磁束密度$\boldsymbol{B}$の大きさ B と方向を求めよ。B は，μ_0，I，a，z を用いて表すこと。

(4) z 軸上で磁束密度が最も大きくなるのはどこか。また，その位置での磁束密度の大きさ $B_{\max}$ を，μ_0，I，a を用いて表せ。



$\boxed{2}$ 質量 m ，角振動数 ω の１次元調和振動子の量子力学的ハミルトニアンは $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ （h はプランク定数）として，次式で与えられる。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

２つの演算子 $a^\dagger, a$ を次のように定義する。

$$a^\dagger = -\alpha\frac{d}{dx} + \beta x \qquad a = \alpha\frac{d}{dx} + \beta x$$

ここで， α, β は

$$\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \qquad \beta = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$$

である。波動関数は全て規格化されているものとして，以下の問に答えよ。

(1) 位置演算子 x と微分演算子 $\dfrac{d}{dx}$ の交換関係 $[x, \dfrac{d}{dx}]$ を求めよ。ここで， x は関数 $f(x)$ を $xf(x)$ に対応させる演算子であり，$\dfrac{d}{dx}$ は関数 $f(x)$ を $\dfrac{df(x)}{dx}$ に対応させる演算子である。交換関係は一般の演算子 A, B に対して $[A, B] = AB - BA$ で定義される。

(2) a と $a^\dagger$ の交換関係 $[a, a^\dagger]$ を求めよ。

(3) ハミルトニアン H を $a^\dagger$ と a を用いて表せ。

(4) $u_E(x)$ を $Hu_E(x) = Eu_E(x)$ を満たし，ハミルトニアン H に対し固有値 E を持つある励起状態の波動関数とする。$a^\dagger u_E(x), au_E(x)$ の H に対する固有値を求めよ。

(5) $u_0(x)$ を $au_0(x) = 0$ で定義される基底状態の波動関数とする。$u_0(x)$ のハミルトニアン H に対する固有値を求めよ。

(6) n 番目の励起状態の波動関数 $u_n(x)$ は次式で与えられる。

$$u_n(x) = C_n\,(a^\dagger)^n u_0(x)$$

$u_n(x)$ のハミルトニアン H に対する固有値を求めよ。また 規格化定数 C_n を定めよ。

平成25年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜学力試験(物理工学専攻)

外国語(英語)

試験時間

11:30 - 12:30

全問を解答すること

次の英文を読んで、以下の問い(1)~(3)に答えよ。

(ア) Drop a rock into water and it sinks. Drop a cork and it floats. (イ) Why the difference?

(ウ) Figure 1 shows the upward pressure force on an arbitrary fluid volume balancing the downward gravitational force. (エ) Now imagine replacing the fluid volume by a solid object of identical shape (Figure 2). The remaining fluid has not changed, so it continues to exert an upward force on the object—a force whose magnitude equals the weight of the original fluid volume. This force is called the buoyancy force, and in giving its magnitude we've stated Archimedes' principle: (オ) The buoyant force on an object is equal to the weight of the fluid displaced by the object.

If submerged object weighs more than the displaced fluid, then the gravitational force exceeds the buoyancy force and it sinks. If the object weighs less than the displaced fluid, the buoyancy force is greater and it rises. Therefore (カ) ____.
In between is the case of neutral buoyancy, when an object's average density is the same as that of the fluid. Fish, submarines, and balloons are often in neutral buoyancy.

Archimedes' principle still holds for a floating object. But now the buoyant force must balance the object's weight—and (キ) this can happen only if the fluid displaced by the submerged part of the object has a weight equal to that of the object. (ク) This condition determines how high in the water the object floats.

cork コルク, gravitation 重力, object 物体, arbitrary 任意の, Archimedes アルキメデス, submerge 水中に沈める

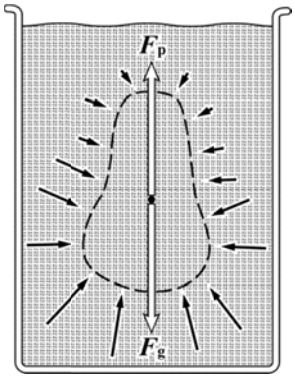


Figure 1 In hydrostatic equilibrium, the upward pressure force $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ is equal to the weight $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$ of any fluid volume.

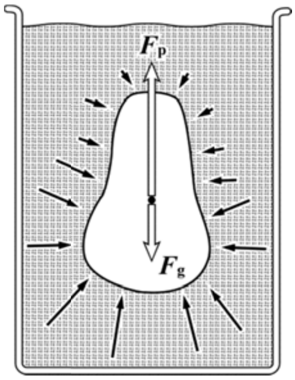


Figure 2 If the fluid is replaced by a solid object, the pressure force remains the same but the gravitational force generally changes. The direction of the net force on the object depends on whether it is more or less dense than the fluid.

(出典: R. Wolfson, J. M. Pasachoff, “Physics”, Addison-Wesley 1999)

(1) 線部(ア)、(ウ)、(エ)、(オ)、(キ)、(ク)の各文を和訳せよ。

(2) 下線部(カ)では、「物体は、その平均密度が流体の密度より大きいか小さいかに依存して、浮いたり沈んだりする。」の文が入る。これを英訳せよ。

(3) 下線部(イ)は、正確には文になっていない。省略を補った文に書き直せ。