平成24年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜学力試験(物理工学専攻)

基礎科目

試験時間

9:00 - 10:00

全問を解答すること

$\boxed{1}$ 独立変数 x の関数 $y_1 = y_1(x)$ と $y_2 = y_2(x)$ が,

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 4y_1 + 3y_2 - x \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 - y_2 + x \end{cases}$$

を満たし，$y_1(0) = y_2(0) = 1$ であるとする。以下の問に答えよ。

(1) $Y_1 = y_1 + y_2$ とおくとき,

$$\frac{dY_1}{dx} = 2Y_1, \qquad Y_1(0) = 2$$

が成り立つことを示し，Y_1 を求めよ。

(2) $Y_2 = ay_1 + by_2$ が,

$$\frac{dY_2}{dx} = Y_2 + x \qquad \cdots\cdots\cdots \text{(A)}$$

を満たすように定数 a，b の値を定めよ。

(3) (2) で定めた a，b に対し，微分方程式 (A) を解いて Y_2 を求めよ。

(4) y_1 と y_2 を求めよ。

$\boxed{2}$

スカラー場 φ を $\varphi = x^2 z + y^2$, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\,\varphi$ と定義する。また, x, y, z 軸の正の方向を向いた単位ベクトルを, それぞれ, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする。

(1) $\boldsymbol{A}$ を求めよ。

(2) スカラー場 $\psi = \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ を求めよ。

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ を求めよ。

(4) 任意の点で $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}$ を満たすようなベクトル場 $\boldsymbol{P}$ は存在しないことを証明せよ。

更に, 曲線 C を以下のように媒介変数 t を用いて定義する。

$$\boldsymbol{r} = (\cos\,t)\,\boldsymbol{i} + (\sin\,t)\,\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

ただし $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$ である。また, 媒介変数 t の値が 0 および 2π に対応する点をそれぞれ C の始点および終点とする。

(5) 曲線 C の長さ

$$L = \int_C ds$$

を求めよ。ここで, 積分変数 s は C の弧長を表し, $ds = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|\,dt$ で定義される。

(6) スカラー場 φ の曲線 C に沿っての線積分

$$I = \int_C \varphi\,ds$$

の値を求めよ。

(7) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の曲線 C に沿っての接線線積分

$$J = \int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

の値を求めよ。

なお, この積分は接線単位ベクトル (単位接ベクトル) $\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$ を用いて

$$J = \int_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t}\,ds$$

と表記されることもある。

平成24年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜学力試験(物理工学専攻)

専門科目

試験時間

10:15 - 11:15

全問を解答すること

$\boxed{1}$ 電荷も電流も存在しない真空中の電磁場について, 以下の問に答えよ。

(1) 電荷も電流も存在しない真空中でのマクスウェルの方程式を，電場の大きさ $\boldsymbol{E}$，電束密度 $\boldsymbol{D}$，磁場の大きさ $\boldsymbol{H}$，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を用いて書け。

(2) 真空中の $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ の関係を，真空の透磁率を μ_0，および真空の誘電率を ϵ_0 として，それぞれ書け。

次に，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ を用いて，電磁場が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$$

であらわされる場合を考える。

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ が, 方程式

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = 0$$

を満たすことを示せ。必要ならば，任意のベクトル $\boldsymbol{C}$ に対して成立する，以下のベクトル公式を用いよ。

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{C}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{C}) - \nabla^2 \boldsymbol{C}$$

$\boxed{2}$ 質量 m の単原子分子 N 個からなる古典理想気体が，体積 V の容器に入っており，温度 T の熱浴に接しているものとする。三次元空間における N 個の分子の位置および運動量ベクトルを，それぞれ，$\boldsymbol{r}^N$ および $\boldsymbol{p}^N$ とする。ただし，$\boldsymbol{r}^N$ は N 個の分子の位置ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N\}$ を表しており，$d\boldsymbol{r}^N \equiv d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 \cdots d\boldsymbol{r}_N$ とする。$\boldsymbol{p}^N$ に関しても同様である。この系に関して以下の問に答えよ。

(1) 分子 i の運動エネルギー K_i を，m および $\boldsymbol{p}_i$ を用いて表せ。

(2) この系のハミルトニアン H を，m および $\boldsymbol{p}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ を用いて表せ。

(3) 正準集団を考える。この系の分配関数 Z は次式で表される。

$$Z = \frac{1}{N!\, h^{3N}} \int\int e^{-H/k_{\mathrm{B}}T} d\boldsymbol{r}^N d\boldsymbol{p}^N$$

ここで，h はプランク定数，k_{B} はボルツマン定数であり，積分範囲は，この系で考えられるすべての空間および運動量範囲とする。この積分を実行し，Z が次式で表されることを示せ。

$$Z = \frac{V^N}{N!\, h^{3N}} \left(\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}\right)^{3N}$$

なお，必要なら以下の公式を使用してもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > 0)$$

(4) N 個の各分子の位置ベクトルが $\boldsymbol{r}_i \sim \boldsymbol{r}_i + d\boldsymbol{r}_i$，運動量ベクトルが $\boldsymbol{p}_i \sim \boldsymbol{p}_i + d\boldsymbol{p}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ の範囲にある確率 $f^{(N)}(\boldsymbol{r}^N, \boldsymbol{p}^N) d\boldsymbol{r}^N d\boldsymbol{p}^N$ を，Z, H, N, T, k_{B}, h, $d\boldsymbol{r}^N$, $d\boldsymbol{p}^N$ の中から必要なものを用いて書き表せ。

(5) $f^{(N)}(\boldsymbol{r}^N, \boldsymbol{p}^N) d\boldsymbol{r}^N d\boldsymbol{p}^N$ を，$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ および $\boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_N$ について積分することにより，1 番目の分子の運動量ベクトルが $\boldsymbol{p}_1 \sim \boldsymbol{p}_1 + d\boldsymbol{p}_1$ の範囲にある確率 $f^{(1)}(\boldsymbol{p}_1)\, d\boldsymbol{p}_1$ が得られる。$f^{(1)}(\boldsymbol{p}_1)\, d\boldsymbol{p}_1$ を計算し，π, m, k_{B}, T, $\boldsymbol{p}_1$, $d\boldsymbol{p}_1$ を用いて表せ。

(6) 確率密度 $f^{(1)}(\boldsymbol{p}_1)$ が，マックスウェル–ボルツマン分布

$$f_{\mathrm{MB}}(v_x, v_y, v_z) = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}} T}}\right)^3 \exp\left[-\frac{m({v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2)}{2k_{\mathrm{B}} T}\right]$$

に等しいことを示せ。ただし，(v_x, v_y, v_z) は分子の速度である。

平成24年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜学力試験(物理工学専攻)

外国語(英語)

試験時間

11:30 - 12:30

全問を解答すること

$\boxed{1}$ 以下の英文は，Schrödinger による，ノーベル賞講演の冒頭部分である。各小問に答えよ。

The fundamental idea of wave mechanics

On passing through an optical instrument, such as a telescope or a camera lens, a ray of light is subjected to a change in direction at each refracting or reflecting surface. The path of the rays can be constructed if we know the two simple laws which govern the changes in direction: the law of refraction which was discovered by Snellius a few hundred years ago, and the law of reflection with which Archimedes was familiar more than 2,000 years ago. As a simple example, Fig. 1 shows a ray A-B which is subjected to refraction at each of the four boundary surfaces of two lenses in accordance with the law of Snellius.

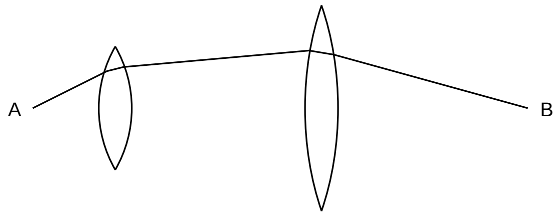

Fig. 1.

Fermat defined the total path of a ray of light from a much more general point of view. In different media, light propagates with different velocities, and the radiation path gives the appearance as if the light must arrive at its destination *as quickly as possible*. (Incidentally, it is permissible here to consider any two points along the ray as the starting- and end-points.) The least deviation from the path actually taken would mean a delay. This is the famous Fermat *principle of the shortest light time*, which in a marvellous manner determines the entire fate of a ray of light by a single statement and also includes the more general case, when the nature of the medium varies not suddenly at individual surfaces, but gradually from place to place. <u>The atmosphere of the earth provides an example. The more deeply a ray of light penetrates into it from outside, the more slowly it progresses in an increasingly denser air.</u>

[instrument 機器, refract 屈折させる, reflect 反射する, media 媒質 (複数形), atmosphere 大気, Snellius (人名) スネル, Archimedes (人名) アルキメデス, Fermat (人名) フェルマー]

(1-1) 題名 (太字の部分) を訳せ。

(1-2) 第 1 段落全文 (Fig. 1 までの全文) を訳せ。

(1-3) Fermat の原理を日本語で説明せよ。

(1-4) 下線部の状況を，図を用いて説明せよ。

$\boxed{2}$ 以下の日本文を英語に訳せ。

津波の高さは，地震 (earthquake) の強度だけでなく，波の伝わる方向や地表面上の反射にも依存する。津波の速度は重力加速度 (acceleration of gravity) と水深の積 (product) の平方根によって決まる。深さが減るほど，津波は遅く進む。その結果，岸辺では津波の高さが増加する。