平成23年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜学力試験（物理工学専攻)

基礎科目

試験時間

9:00 - 10:00

全問を解答すること

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$ が, $x=0$ を含むある開区間 I で $n+1$ 回微分可能であるとき, 以下の小問に答えよ.

(1) $p(0)=f(0)$, かつ, $p^{(k)}(0)=f^{(k)}(0)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ が成立するような n 次多項式 $p(x)$ は,

$$p(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

と書けることを示せ (以下, この $p(x)$ について考える).

(2) b を 開区間 I 内の点で, $b>0$ となるものを, 任意にとって固定する.

$$K=\frac{f(b)-p(b)}{b^{n+1}},\quad g(x)=f(x)-p(x)-Kx^{n+1}$$

とおく. $g(x)$ は開区間 I で $n+1$ 回微分可能であることを示せ. さらに,

$$g(0)=g(b)=0,\ g^{(k)}(0)=0\ (k=1,2,\cdots,n)$$

が成立することを示せ.

(3) 以上のことより, 次の議論 (i), (ii) が成立する.

(i) $g(x)$ は閉区間 $[0,b]$ で連続で, 開区間 $(0,b)$ で微分可能であり, $g(0)=g(b)=0$ なので, $g(x)$ にロルの定理を適用すれば, $g'(c_1)=0$, かつ, $0<c_1<b$ である点 c_1 が存在する.

(ii) $g'(x)$ は閉区間 $[0,c_1]$ で連続で, 開区間 $(0,c_1)$ で微分可能であり, $g'(0)=g'(c_1)=0$ なので, $g'(x)$ にロルの定理を適用すれば, $g''(c_2)=0$, かつ, $0<c_2<c_1$ である点 c_2 が存在する.

このとき, 次の命題 (iii), (iv), (v) を証明せよ.

(iii) $g^{(k)}(c_k)=0$, かつ, $0<c_k<b$ である点 c_k が存在する $(k=1,2,\cdots,n+1)$.

(iv) $K=\dfrac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!},\quad f(b)=p(b)+Kb^{n+1}$.

(v) $\theta=\dfrac{c_{n+1}}{b}$ とおくと, $0<\theta<1$.

(4) 以上の結果を用いて, x を開区間 I 内の点で、$x>0$ とするとき,

$$f(x)=p(x)+\frac{f^{(n+1)}(\theta\cdot x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

となるような x の関数 θ で、$0<\theta<1$ であるものが存在することを示せ.

(5) $f(x)=e^x$, $n=4$ のとき, $p(\frac{1}{2})$ の値を計算せよ. この値は、$\sqrt{e}$ の真値と比べて, 10 進法位取り表示では, 小数点以下第何位まで正しいか評価せよ. ただし, $0\leq\sqrt{e}<2$ であることを用いてよい.

$\boxed{2}$ 実行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ について、次の小問に答えよ。

(1) 行列式 $|A|$ が

$$|A| = (\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)^2$$

となることを示せ。

(2) 行列 A のすべての固有値 λ_n, $(n = 1, 2, 3)$、及び、各固有値 λ_n に対する固有ベクトル $\mathbf{q}_n$ の内、規格化されたもの (すなわち、大きさ $|\mathbf{q}_n|$ が 1 であるベクトル) を求めよ。

(3) 行列 A を対角化する直交行列 Q、 すなわち、

$$^tQAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad {}^tQQ = E$$

となる行列 Q を求めよ。ここで、^tQ は、行列 Q の転置行列、E は単位行列である。

(4) 3 つの実数変数 p_1, p_2, p_3 の関数、$F(p_1, p_2, p_3)$ を

$$\begin{aligned} F(p_1, p_2, p_3) &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \alpha(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + 2\beta(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1) \end{aligned}$$

とおく。条件

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

をみたす $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ のうち、関数 $F(p_1, p_2, p_3)$ の値が最小となるものを求めよ。ただし、

$$\alpha > \beta$$

とする。

平成23年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜学力試験（物理工学専攻)

専門科目

試験時間

10:15 - 11:15

全問を解答すること

$\boxed{1}$ 図 1 に示す回路があり，電圧 V の電源がスイッチ S を介して，抵抗値 R の抵抗と静電容量 C のコンデンサーに接続されている。

(1) 時刻 $t=0$ において，スイッチ S を閉じた。コンデンサーに加わる電圧 V_{C} について，V, R, C, 及び V_{C} と V_{C} の時間微分を用いて，成り立つ方程式を書け。ただし，スイッチ S を閉じる前には，コンデンサーには電荷は蓄えられていなかったものとする。

(2) 時刻 t の関数として V_{C} を求めよ。

(3) スイッチ S を閉じてしばらくすると，コンデンサーに加わる電圧 V_{C} は一定値となった。このとき，コンデンサーに蓄えられている静電エネルギー W_{C} を求めよ。

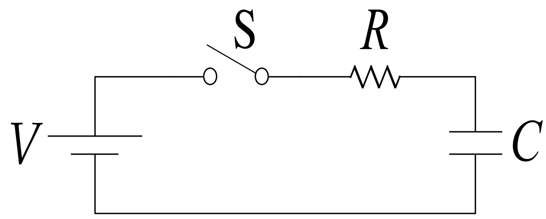

図 1:

図 2 に示す回路があり，電圧 v の交流電源が抵抗値 R の抵抗と静電容量 C のコンデンサーに接続されている。

(4) 交流電源の電圧 v が, $v = v_0 \sin \omega t$ のとき，コンデンサーと抵抗に現れる電圧の振幅は等しくなっていた。このとき, ω, R, C の間に成り立つ関係を書け。ただし, v_0 と ω はそれぞれ，振幅と角周波数で定数である。

(5) 交流電源の電圧 v が, $v = v_0 \sin 0.01\omega t + v_0 \sin 100\omega t$ のように，角周波数 0.01ω と角周波数 100ω の交流電圧の重ね合わせとなっている場合を考える。コンデンサーに加わる電圧について，角周波数 0.01ω の交流電圧の振幅は，角周波数 100ω の交流電圧の振幅の何倍になっているか求めよ。このとき，(4) で求めた ω, R, C の間に成り立つ関係を用いること。

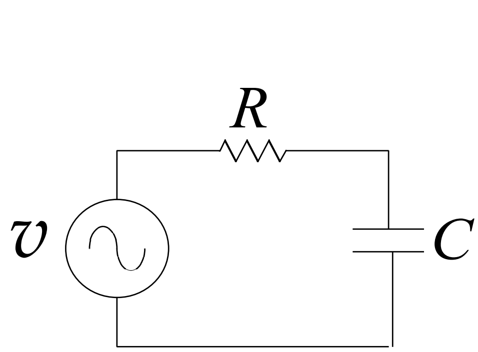

図 2:

$\boxed{2}$ 1次元空間において，質量 m をもつ粒子のハミルトニアン H と，粒子に対するポテンシャル $V(x)$ が，以下のように与えられている．ここで，L は正の定数であり，$\hbar$ はプランク定数である．以下の問いに答えよ．

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \qquad V(x) = \begin{cases} \infty & (L/2 < x) \\ 0 & (-L/2 \leq x \leq L/2) \\ \infty & (x < -L/2) \end{cases}$$

(1) 基底状態の規格化された波動関数 ψ_0 およびエネルギー準位 ε_0 を求めよ．

(2) 第1励起状態の規格化された波動関数 ψ_1 およびエネルギー準位 ε_1 を求めよ．

k_B をボルツマン定数とすると，この系は温度 T が $k_\mathrm{B}T \ll \varepsilon_1 - \varepsilon_0$ を満たすとき，エネルギー準位が ε_0 と ε_1 からなる2準位系とみなすことができる．

たがいに独立な，この2準位系が，N 個ある系に対して正準集団を考える．以下の問いに答えよ．解答の際，エネルギー準位は ε_0, ε_1 の表記のままでも構わない．

(3) 分配関数を書きくだせ．

(4) 温度 T における系のエネルギーを求めよ．

(5) (4) の結果を，$u = e^{-(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/k_\mathrm{B}T}$ として，u の1次までの展開で近似せよ．

平成23年度
福井大学大学院工学研究科博士前期課程
一般選抜学力試験（物理工学専攻)

外国語（英語）

試験時間

11:30 - 12:30

全問を解答すること

$\boxed{1}$ 以下の英文は、虹 (rainbow) に関する質問とその答である。読んで以下の問いに答えよ。

[question]
Rainbows, an enchanting spectacle of nature, pose a number of baffling questions. (1) We know they are caused by drops of water falling through the air, refracting sunlight in such a way that it creates a curve of light exhibiting all colors of the spectrum in their natural order. Now answer the following: Why (2) is it you do not always see a rainbow when it rains while the sun shines? Can the moon also produce a rainbow? Even without rain you can, at times, see a rainbow if you look (3) ________ a lawn early in the morning. Why?

[answer]
Part of the mysterious beauty of the rainbow: You can see the spectrum only if (4) the angle of the refraction between the sun, the drop of water, and your line of vision is between 40° and 42°. Lunar rainbows are also possible but rare, because moonlight is not as strong as sunlight and (5) its intensity varies with the phases of the moon. This (6) phenomenon is called dew-bow and is caused by the water drop on the grass.

(refract〔光などを〕屈折させる, vision 視覚, lawn 芝生, phases of the moon 月の満ち欠け)

(1-1) 下線 (4) が理解できる挿絵を描け。

(1-2) 下線 (1) を訳せ。

(1-3) 下線 (2) と文法上同じ使用法の文を下から選べ。

- **(a)** Be it ever so humble, there's no place like home.
- **(b)** Is it a direct flight or a connecting flight?
- **(c)** Is it just me or are you crying?
- **(d)** Why is it you can write a letter in English this well, but can't speak in it?

(1-4) 下線 (3) に最も適当なものを下の４つの単語から一つ選べ。
(a) across (b) around (c) over (d) through

(1-5) 下線 (5) を訳せ。

(1-6) (6) の複数形を書け。

$\boxed{2}$ 以下の日本語の文を英語に訳せ。

(2-1) 質点 (mass point) の概念 (concept) は力学の基礎概念のひとつである。

(2-2) ある物体の運動を記述する場合、その大きさを無視できるようなとき、その物体を質点とよぶことにする。

(2-3) 剛体 (rigid body) は、相互間の距離が不変であるような質点の集まりであると定義することができる。

$\boxed{3}$

ファラデー (Faraday) の電磁誘導 (electromagnetic induction) の法則を英語で簡潔に説明せよ。