2009年度 福井大学大学院工学研究科

博士前期課程

物理工学専攻 入学試験問題

基礎科目　数学

試験時間

9:00 -11:00

全問を解答すること

[問題 1]

次の行列式の値をそれぞれ求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 911 & 910 \\ 912 & 911 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 6789 & 6788 & 6787 \\ 7890 & 7889 & 7888 \\ 8901 & 8900 & 8899 \end{vmatrix}$

[**問題 2**]

定積分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) I_0, I_1, I_2 の値を求めよ.

(2) $n \geq 2$ について, I_n を I_{n-2} を用いて表示せよ. (ヒント: 部分積分)

(3) I_{2n}, I_{2n+1} $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を求めよ.

(4) 前の設問を用いて, 次の定積分

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{1-x}} dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を求めよ. (ヒント: $x = \sin^2 \theta$ と置換)

[**問題 3**]

次のようなタイプの常微分方程式について考察しよう.

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+\mu\,x\frac{d}{dx}+\nu\right\}f(x)=\gamma\,x^{\lambda} \quad . \tag{A}$$

ただし，$f(x)$ は正の変数 x の実関数であり，μ, ν, λ および γ は実定数とする.

これを解くために, まず変数変換 $s=\log_e x$ によって実変数 s を導入しよう. この変数変換によって，$f(x)$ を s の関数とみたものを $F(s)$ と書くことにする．また, 微分演算子 $\dfrac{d}{ds}$ を D_s と書くことにする.

このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 関係式

$$x\frac{d}{dx}f(x)=D_sF(s) \quad , \qquad x^2\frac{d^2}{dx^2}f(x)=D_s(D_s-1)F(s)$$

が成り立つことを示せ.

(2) より一般に，n を任意の正の整数とするとき，

$$x^n\frac{d^n}{dx^n}f(x)=D_s(D_s-1)\cdots(D_s-(n-1))F(s)$$

が成り立つことを, n に関する数学的帰納法により証明せよ.

(3) 最初に挙げた式 (A) を，$F(s)$ に関する常微分方程式に書き直せ.

(4) $y(x)$ が変数 x $(x>0)$ の実関数とするとき，常微分方程式

$$x^2y''(x)+2xy'(x)-2y(x)=3x \tag{B}$$

を初期条件

$$y(1)=0 \quad , \qquad y'(1)=0$$

のもとで解け.

[**問題** 4]

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, 平面領域 S, 閉曲線 C をそれぞれ下式で定義する。

$$\boldsymbol{A} = (x-y,\, x+y,\, xyz)\,,$$
$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A},$$
$$\mathrm{S} = \Big\{(x,y,0)\,|\,x^2+y^2 \leq 1\Big\}\,,$$
$$\mathrm{C} = \Big\{(x,y,0)\,|\,x^2+y^2 = 1\Big\}\,.$$

ただし, S の表裏は, 領域 $z>0$ に面する側を表と定める。すなわち, S の法（線）単位ベクトルは, z 軸の正方向を向くものとする。また, 閉曲線 C の向きは, 領域 $z>0$ 内の点からみて左回り（反時計回り）とする。

このとき, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の, 閉曲線 C に沿っての線積分

$$I_{\mathrm{C}} = \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r},$$

および, ベクトル場 $\boldsymbol{B}$ の, 平面領域 S 上での面積分

$$I_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

の値をそれぞれ別個に計算し, この場合についてストークスの定理が成立していることを確認せよ。

2009年度 福井大学大学院工学研究科

博士前期課程

物理工学専攻 入学試験問題

専門科目　物理

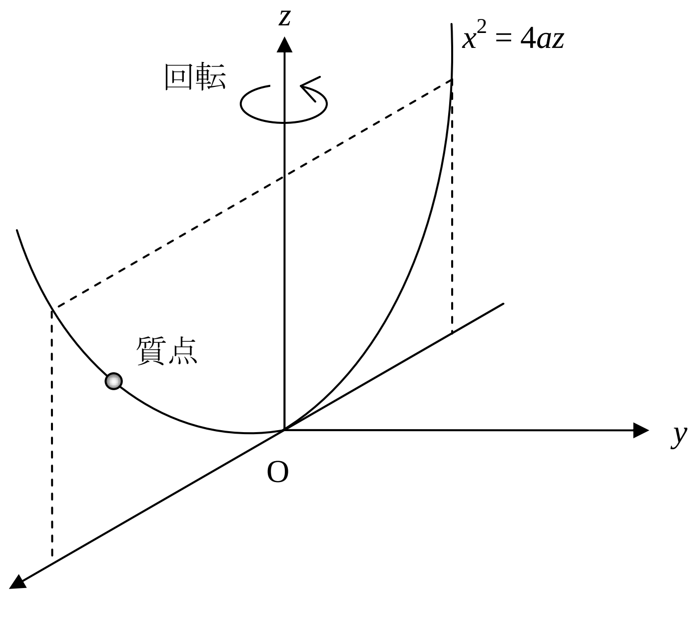
試験時間

13:00 - 15:00

全問を解答すること

［ 問題 1 ］

図のように，鉛直な z 軸（正方向を鉛直上方にとる）のまわりに一定の角速度 $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)$ で回転する直交座標系 (x,y,z) がある．この座標系の $x-z$ 面内に固定された放物線 $x^2=4az$ 上に束縛されて運動する質量 m の質点を考える．以下の各問いに答えよ．



なお，慣性系でのベクトル $\boldsymbol{A}$ の時間微分 $d\boldsymbol{A}/dt$ と回転系での時間微分 $d'\boldsymbol{A}/dt$ の間には回転角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ として

$$d\boldsymbol{A}/dt = d'\boldsymbol{A}/dt + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}$$

の関係がある．また，ベクトル３重積 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B})$ の展開を用いてよい．

（1）質点にかかる力を $\boldsymbol{F}$ とするとき，回転座標系での運動方程式が

$$m\frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

となることを示せ．

（2）この運動方程式を回転する直交座標系 (x,y,z) の成分毎に書き下せ．

（3）上で求めた運動方程式の x 成分と y 成分には，力 $\boldsymbol{F}$ の他に回転座標系に伴う見かけ上の力（慣性力）が現れる．運動方程式の中に現れる慣性力の項をすべて挙げよ．また，それらはそれぞれ何と呼ばれるか．

（4）質点が束縛されている放物線はなめらかで，力 $\boldsymbol{F}$ は重力（重力加速度 g）と，放物線に垂直な抗力のみとする．今は y 方向の運動は考えなくてもよいので，λをパラメータ，$f(x,z)=x^2-4az$ として，抗力の $x-z$ 面内の成分は $\boldsymbol{R}=-\lambda\nabla f$ から求めることができる．抗力の x 成分と z 成分を λ, x, a を用いて表せ．

（5）質点が放物線上の $x=z=0$ 以外の位置に止まるとき，パラメータ λ と角速度の大きさ ω を m，a および g を用いて表せ．

[**問題 2**]

図のように，真空中に互いに直行する x 軸，y 軸，z 軸を定め，z 軸上の $z=-\ell/2$ の位置 $\mathrm{Q}\left(0,0,-\ell/2\right)$ に負の点電荷 $-q$ を置き，そこから $+z$ 方向に距離 ℓ だけ離れた位置 $\mathrm{Q}'\left(0,0,\ell/2\right)$ に正の点電荷 $+q$ を置く (ただし，$q>0$)．このような正負一対の点電荷を電気双極子，ベクトル $\boldsymbol{p}=q\,\overrightarrow{\mathrm{QQ}'}=(0,0,q\ell)$ を電気双極子モーメントとよぶ．真空の誘電率を ε_0 として，以下の問いに答えよ．なお，ここでは物理量は全て国際単位系 (SI) で表わされているものとする．

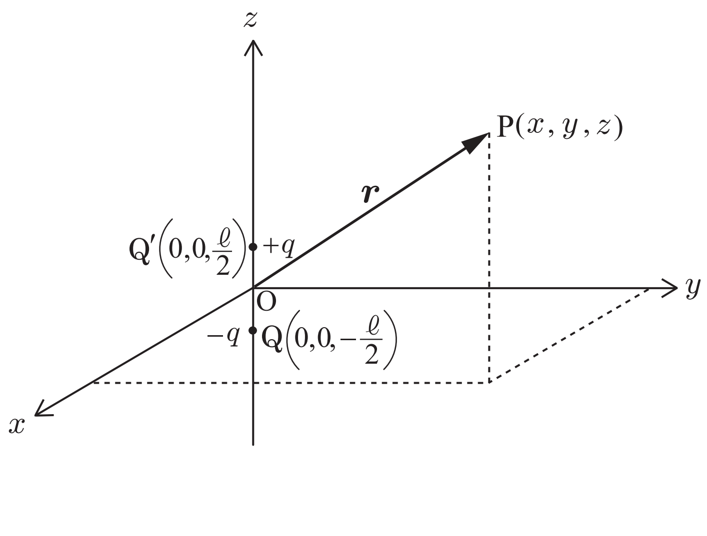
(1) 点 $\mathrm{Q}\left(0,0,-\ell/2\right)$ に置いた点電荷 $-q$ が位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ で表わされる点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ に作る電位を $\phi_1(\boldsymbol{r})$ とし，点 $\mathrm{Q}'\left(0,0,\ell/2\right)$ に置いた点電荷 $+q$ が点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ に作る電位を $\phi_2(\boldsymbol{r})$ とする．$\phi_1(\boldsymbol{r})$ と $\phi_2(\boldsymbol{r})$ を，それぞれ ε_0，q，ℓ，z，ベクトル $\boldsymbol{r}$ の長さ r を用いて表わせ．ただし，原点 O から無限に離れた位置で電位がゼロとなるように，電位の基準点を定めるものとする．

(2) 問 (1) で求めた $\phi_1(\boldsymbol{r})$ と $\phi_2(\boldsymbol{r})$ を用いて，この電気双極子が点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ に作る電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ を求め，ε_0，q，ℓ，z，ベクトル $\boldsymbol{r}$ の長さ r を用いて表わせ．ただし，距離 ℓ は十分小さく，$\ell/r\ll 1$ が成り立っているものとして，$\phi(\boldsymbol{r})$ を ℓ/r のべき乗で展開し，ℓ/r の 1 次の項まで求めよ．必要であれば，$|h|\ll 1$ のとき，$(1+h)^\alpha$ を h のべき乗で展開し，h の 2 次以上の項を無視すると，$(1+h)^\alpha\simeq 1+\alpha h$ となることを用いてもよい．

(3) 問 (2) で求めた電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ を，ε_0，ベクトル $\boldsymbol{r}$，ベクトル $\boldsymbol{r}$ の長さ r，電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ を用いて表わせ．

(4) 問 (2) で求めた電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ を用いて，点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の各成分 $(E_x(\boldsymbol{r}),E_y(\boldsymbol{r}),E_z(\boldsymbol{r}))$ を求め，ε_0，q，ℓ，x，y，z，ベクトル $\boldsymbol{r}$ の長さ r の中の必要な記号を用いて表わせ．ただし座標原点を除く。

(5) 問 (4) で求めた電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を，ε_0，ベクトル $\boldsymbol{r}$，ベクトル $\boldsymbol{r}$ の長さ r，電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ を用いて表わせ.



[**問題 3**]

図 1 に示すように, ブタン CH_3–CH_2–CH_2–CH_3 はトランス (t), ゴーシュ$^+$ (g^+), ゴーシュ$^-$ (g^-) の 3 種類の立体配座が安定である．今この 3 状態のみをとりうるモデルを考える．t 配座が最もエネルギーが低く, g^+ および g^- 配座は, ともに t 配座よりも同じエネルギー ΔE (>0) [J] だけエネルギーが高いとする．これらの立体配座の存在比率が Boltzmann 分布

$$P(E) = A\exp(-E/k_{\mathrm{B}}T)$$

に従うとして, 以下の問いに答えよ．ただし, A は規格化因子, T [K] は温度, k_{B} [J/K] は Boltzmann 定数である.

(1) t 配座のエネルギーを E_t [J] として, 各配座の存在確率を求めよ.

(2) 規格化因子 A を求めよ.

(3) 温度 T における各配座の存在確率を ΔE, T, k_{B} を用いて表せ.

(4) $T \to 0$ の極限における各配座の存在確率を計算せよ.

(5) $T \to \infty$ の極限における各配座の存在確率を計算せよ.

(6) $T = 400$ K, $\Delta E = 552\times10^{-23}$ J として, 各状態の存在確率を計算せよ. ただし, $k_{\mathrm{B}} = 1.38\times10^{-23}$ J/K である. また, $\mathrm{e} = 2.72$ を用いてもよい.

(7) 使い捨てライターに充填されているガスの主成分はブタンである．ライター中のブタン分子がすべて t 配座をとったとき, 最も系のエネルギーが低くなるが, 上の計算によると, 実際にはある割合で g^+ や g^- 配座が含まれていることになる．これはなぜか．熱力学の考え方に基づいて簡潔に説明せよ．ただし, 分子間の相互作用が配座分布に与える影響は無視できるとする.

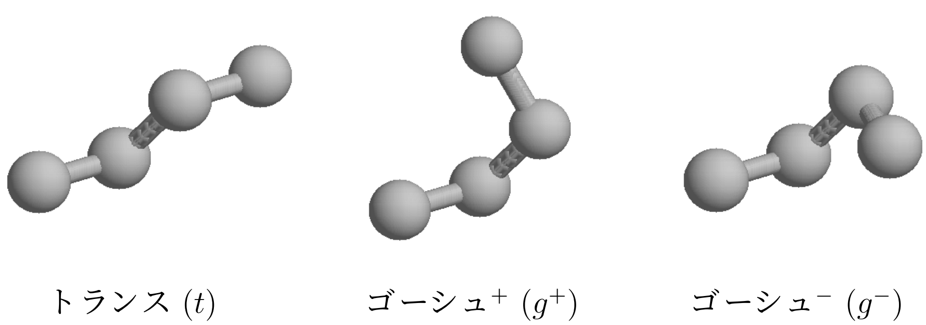


図 1: ブタンの 3 種類の立体配座. 水素原子は省略してある.

[問題 4]

ハミルトニアン $\hat{H}(\hat{x}(t), \hat{p}(t))$ が次式、

$$\hat{H}(\hat{x}(t), \hat{p}(t)) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2(t) + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2(t)$$

で与えられる質量 m の粒子の調和振動子を、Heisenberg 表示で調べる。以下の問いに答えよ。

(1) Heisenberg 表示では、物理量である演算子 $\hat{O}(t)$ は、Heisenberg 方程式、

$$i\hbar\frac{d\hat{O}(t)}{dt} = [\hat{O}(t), \hat{H}(\hat{x}(t), \hat{p}(t))]$$

を満たす。ここで、[,] は正準交換関係で、

$$[\hat{A}(t), \hat{B}(t')] = \hat{A}(t)\hat{B}(t') - \hat{B}(t')\hat{A}(t)$$

であり、また、

$$[\hat{x}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar\mathbf{1}$$

である。$\dfrac{d\hat{x}(t)}{dt}$ 及び $\dfrac{d\hat{p}(t)}{dt}$ を求めよ。

(2) 上の結果を用いて、$\dfrac{d^{2n}\hat{x}(t)}{dt^{2n}}$ 及び $\dfrac{d^{2n+1}\hat{x}(t)}{dt^{2n+1}}$ を $\hat{x}(t)$, $\hat{p}(t)$ で表せ。

(3) 演算子についても Taylor 展開が可能であるとし、三角関数 sin, cos の Taylor 展開

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\end{aligned}$$

を考慮に入れ、$\hat{x}(t)$ を $\hat{x}(0)$, $\hat{p}(0)$ を用いて表せ。

(4) 時刻 $t = 0$ の時の状態の波動関数

$$\Psi(x) = \langle x, t = 0|\Psi\rangle$$

が、

$$\Psi(x) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2} + \frac{ip_0x}{\hbar}\right]$$

であるとき、この状態に対する $\hat{x}(t)$ の期待値 $\bar{x}(t)$ を求めよ。ここで、$\langle x, t = 0|$ は、時刻 $t = 0$ の時の演算子 $\hat{x}(0)$ の固有状態で、

$$\langle x, t = 0|\hat{x}(0) = x\langle x, t = 0|$$

である。必要ならば、以下の公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{x^2}{\sigma^2}\right]dx = \sqrt{\pi\sigma^2}$$

(5) 異なった時刻の演算子の交換関係 $[\hat{x}(t), \hat{p}(t')]$ を求めよ。

2009年度 福井大学大学院工学研究科

博士前期課程

物理工学専攻 入学試験問題

英語

試験時間

9:00 - 10:00

全問を解答すること

[問題１]
下記の英文を読んで以下の問いに日本語で答えよ。

(1) 1820 年代の Faraday の化学分野における業績を２つあげよ。
(2) Faraday が 1825 年に発見した化学物質はなぜ重要であるか説明せよ。
(3) Faraday は科学研究以外に，科学教育にも尽力したことがうかがえる事実をあげよ。
(4) 下線部を日本語に訳せ。
(5) Faraday が 1826 年に書いた文章で指摘している近代の科学研究者にとっての問題とは何か？

Faraday did very little else in electricity and magnetism in the 1820s (at least he made no real progress when he did, from time to time, briefly try to tackle the subject) but carried out sound work in chemistry, being the first person to liquefy chlorine (in 1823) and discovering the compound now called benzene (1825), which is important because it turned out to have the archetypal ring structure later explained by Kekulé and was found in the twentieth century to be of key importance in the molecules of life. He also became director of laboratory at the RI (which effectively meant he was running the place) in 1825, as Davy's successor, and in the later 1820s enhanced the fortunes of the RI by introducing new series of popular lectures (many of which he gave himself) and the Christmas lectures for children. <u>The wonder is not that he did not return to studying electricity and magnetism thoroughly for so long, but that he found time to do any research at all.</u> It's a significant sign of how science was changing, that as early as 1826 Faraday would write:

> It is certainly impossible for any person who wishes to devote a portion of his time to chemical experiment, to read all the books and papers that are published in connection with his pursuit; their number is immense, and the labour of winnowing out the few experiment and theoretical truths which in many of them are embarrassed by a very large proportion of uninteresting matter, of imagination, and of error, is such, that most persons who try the experiment are quickly induced to make a selection in their reading, and thus inadvertently, at times, pass by what is really good.

(Quoted from *The Scientists* by John Gribbin, Random House)

Faraday: Michael Faraday (1791~1867)
liquefy: 液化する
compound: 化合物
archetypal: 原型的な，典型的な
Kekulé: Friedrich August Kekulé (1829~ 1896)
RI: Royal Institution

Davy: Humphry Davy (1778~1829)
successor: 後継者
winnow: 選り分ける
embarrass: 当惑させる，邪魔をする
inadvertently: 不注意に，うっかりして

[問題 2]

次の日本文を英文にせよ。

(1) コイル(a coil)に電流を流すと，磁石のように振る舞う。

(2) 真空における電磁波の速度は 30 万キロメートル毎秒である。

(3) 白川英樹博士は導電性の高分子（electrically conductive polymer）を発見した。

(4) この学会の講演申し込み締め切り（deadline）は 2008 年 11 月 21 日です。