2007年度 福井大学大学院工学研究科 前期課程

物理工学専攻入学試験問題

基礎科目

試験時間

9:00 -11:00

全問を解答し、解答用紙のみ提出せよ。解答用紙は１問につき１枚の表と裏を使用し、問題番号を明記すること。

[問題 1]

次の連立 1 次方程式を解け. ただし, b は実数の定数とする.

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x_1 & & -x_3 & & -2x_5 & = & 1 \\ & x_2 & +x_3 & & +x_5 & = & -2 \\ -x_1 & & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & & -3x_5 & = & b \end{array}\right.$$

[**問題 2**]

$I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx, \quad J = \int_0^{\pi/2} \cos^6 x\,dx$ とおく．以下の各問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 2x\,dx$ を求めよ．

(2) (1) を利用して，$I + J$ を求めよ．

(3) 置換 $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ を用いて，$I = J$ を示せ．

(4) I を求めよ．

[**問題 3**]

座標空間の原点を中心とする半径 a $(a > 0)$ の球を V とし, その境界の球面を S とする. ベクトル場 $\mathbf{A}$ が $\mathbf{A} = (x, y, z)$ の場合に, 発散定理 (ガウスの定理)

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

の両辺を計算し, 等号が成立することを確認したい. ただし, $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right)$ であり, $\mathbf{n}$ は S の外向きの法単位ベクトルとする.

(1) 左辺を計算せよ.

(2) 右辺を計算せよ.

[**問題 4**]

微分方程式
$$(x+y)\frac{dy}{dx}-(x-y-2)=0$$
について，以下の問いに答えよ．

(1) A, B を定数として，
$$X=x+A, \qquad Y=y+B$$
と変数変換するとき，$\dfrac{dY}{dX}$ を X, Y, A, B を用いて表せ．

(2) (1) で求めた微分方程式が，同次形となるよう A, B を定めよ．

(3) 与えられた微分方程式の一般解を求めよ．

2007年度 福井大学大学院工学研究科 前期課程

物理工学専攻入学試験問題

専門科目

試験時間

13:00 - 15:00

全問を解答し、解答用紙のみ提出せよ。解答用紙は１問につき１枚の表と裏を使用し、問題番号を明記すること。

[**問題 1**]

中心力である引力 $\vec{F}\big(\vec{r}\big) = F(r)\,\vec{r}\;/\;r$ が働く質点Pの運動を考える．ここで，$\vec{r}$ は力の中心点Oからの質点Pの位置ベクトルで，r は $\vec{r}$ の大きさである．また，この力は引力であるため $F(r)$ の符号は負である．質点Pの質量を m として，以下の各問に答えよ．

(1) 中心点Oに関する角運動量 $\vec{\ell}$ が時間によらず一定である (保存される）ことを示せ．ただし，$\vec{\ell}$ は運動量 $\vec{p}$ を用いて，$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$ で定義される。

(2) 中心力のもとでは角運動量 $\vec{\ell}$ が一定であることから，質点Pは点Oを含み $\vec{\ell}$ に垂直な平面内で運動することがわかる．質点Pの位置を，点Oを原点とするこの平面内での 2 次元極座標 (r, θ) で表したとき，加速度の動径成分 a_r は $a_r = (d^2r/dt^2) - r(d\theta/dt)^2$ と表される．この式を利用して，角運動量の大きさ $\ell = mr^2(d\theta/dt)$ と $F(r)$ を用いて，動径方向についての運動方程式を θ を含まない数式で表せ．

(3) この中心力の引力場の下で，円軌道が可能であることを示せ．また，この円軌道の半径 c を，軌道上で働く力 $F(c)$ と ℓ，m を用いて表せ．

(4) 前問で求めた円軌道は全てが安定な軌道とは限らない．半径 c の円軌道上を運動していた質点Pの距離 r に小さなずれ $\epsilon = r - c$ が生じたとき，その後の軌道が元の軌道の近くに留まるための条件が，$F'(c) + 3F(c)/c < 0$ であることを示せ．ただし，$\epsilon \ll c$ として，(2) で得られた運動方程式からずれ ϵ の運動方程式を近似的に求めて議論せよ．

[**問題 2**]

半径 a の絶縁球内に負電荷 $-Q$ が一様に分布している．また, 球の中心には正の点電荷 Q がある．以下の問に答えよ．ただし, 球の誘電率は真空の誘電率 ϵ_0 と同じとする.

(1) 負電荷の電荷密度 ρ を a, Q を用いて表せ.

(2) 球内外における電場の大きさ $E(r)$ を求めよ．ここで r は球中心からの距離である．導出の際に Gauss の法則を用いても良い．また, $E(r)$ の r に対する変化の様子をグラフで表せ.

(3) 球表面を基準点とした時の電位 $\phi(r)$ を求めよ（つまり $\phi(a) = 0$ とする）．また, $\phi(r)$ の r に対する変化の様子をグラフで表せ.

[問題 3]

質量 m を持つ N 個の古典3次元自由粒子が体積 V の箱に入れられている．このとき，この粒子集団全体の Hamiltonian が以下の式のように与えられる．個々の粒子は見分けがつかないものとし，この粒子集団を温度 T の正準集団 (Gibbs 集団) として考える．各問に答えよ．

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m}(p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2)$$

(1) 分配関数 Z が,

$$Z = \frac{V^N}{h^{3N} N!}(2\pi m k_{\mathrm{B}} T)^{3N/2}$$

で与えられることを示せ．ここで，k_{B} は Boltzmann 定数である．また，必要ならば以下の積分公式を使用すること．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-au^2)\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (0 < a)$$

(2) エネルギー E と，比熱 C を求めよ．

(3) 自由エネルギー F を求め，F が示量性をもつことを説明せよ．必要ならば近似公式 $\ln N! \simeq N(\ln N - 1)$ を用いよ．

[**問題 4**]

質量 m の粒子が,

$$F(x) = -m\omega^2 x$$

で表される力 $F(x)$ を受けながら x 軸に沿って一次元の運動をしている．ここで，x は粒子の座標であり，ω は正の定数である．このとき，古典力学においては，この粒子は角振動数 ω で単振動をすることは明らかである．この問題では，この粒子の運動を量子力学的に考える．下の各問に答えよ．なお，必要ならば次の定積分の値を用いよ（a は任意の正の定数）.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \ , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} dx = 0 \ ,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \ , \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = 0$$

(1) この粒子のポテンシャルエネルギー $V(x)$ を x の関数として表せ．ただし，$V(0) = 0$ とする．

(2) 問 (1) の結果を用いて，この粒子の波動関数 $\psi(x,t)$ が従うシュレディンガー方程式を書き下せ.

(3) 次式で表される波動関数 $\psi_1(x,t)$ および $\psi_2(x,t)$ は，両方ともそれぞれ，問 (2) のシュレディンガー方程式を満足することを示せ.

$$\psi_1(x,t) = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 - i\frac{1}{2}\omega t}, \qquad \psi_2(x,t) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 - i\frac{3}{2}\omega t}$$

(4) $\psi_1(x,t)$ および $\psi_2(x,t)$ が問 (2) のシュレディンガー方程式の解であるとき，それらの和の波動関数 $\psi_s(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$ も同じシュレディンガー方程式の解であることは明らかである．この波動関数 $\psi_s(x,t)$ を規格化せよ.

(5) 粒子の運動状態が問 (4) で規格化した波動関数 $\psi_s(x,t)$ で表されるとき，座標 x の期待値 $<x>$ を求め，古典力学における粒子の運動と同様に $<x>$ は角振動数 ω で単振動をすることを示せ.

2007年度 福井大学大学院工学研究科 前期課程

物理工学専攻入学試験問題

英語

試験時間

9:00 - 10:00

全問を解答し、解答用紙のみ提出せよ。解答用紙は１問につき１枚の表と裏を使用し、問題番号を明記すること。

[**問題 1**]

別紙の資料 (*Nature* 誌 **442** 巻 (2006 年発行) 367 ページ) を読み、以下の問いに日本語で答えよ。

(1) “lab-on-a-chip” の微小な体積がもたらす利点を **4 つ** 列挙せよ。

(2) “lab-on-a-chip” の実現に向けて、物理学者、エンジニア、化学者、生物学者のそれぞれの役割を述べよ。

(3) “lab-on-a-chip” の応用が期待される分野を **3 つ** 列挙せよ。

(4) “lab-on-a-chip” とはどのような概念か。100–150 字で説明せよ。なお、本文の他、表紙挿絵や目次も参考にせよ。

chip – チップ、集積回路
device – 装置
appeal – ⟨物が⟩(人の) 心に訴える
reagent – 試薬
centralize – 中心に集める、集中させる
Chimia – スイス化学会発行の雑誌名。1991 年に関連論文が掲載された。
fashionable craze – 一時的な熱狂、大流行
compelling – 人を動かさずにはおかない
reduce – 縮小する
recognize – 容認する
integrated – 統合された、集積された
cellular – 細胞の
point-of-care – 現場診断
diagnostic – 診断の
commercial exploitation – 商品開発
microfluidic – 微小流体工学の
serpentine – ヘビのような

[**問題 2**]

次の日本文を英文にせよ。

(1) 室温における窒素分子の平均速度は約 500m/s である。

(2) 赤外線の波長は可視光の波長よりも長い。

(3) 科学者たちは冥王星が惑星であるかどうかについて長時間議論した。

(4) フランクフルト行きの列車を予約したいのですが。

窒素 – nitrogen; 赤外線 – infrared radiation; 可視光 – visible light
冥王星 – Pluto; 惑星 – planet; フランクフルト – Frankfurt